

Referuje: Maciej Ulas

Tytuł: Zbiór sześciątów Hilberta wymiaru trzy w zbiorze kwadratów jest nieskończony

Streszczenie: Sześciątem Hilberta wymiaru d nazywamy zbiór liczb całkowitych

$$H(a_0; a_1, \dots, a_d) = a_0 + \{0, a_1\} + \dots + \{0, a_d\} = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^d \varepsilon_i a_i : \varepsilon_i \in \{0, 1\} \right\}.$$

Brown, Erdős i Freedman sformułowali pytanie, czy maksymalny wymiar sześciątów Hilberta w zbiorze $\mathcal{S} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ kwadratów liczb całkowitych jest ograniczony, czy nie. Dietmann i Elsholtz udowodnili, że jeśli $H(a_0; a_1, \dots, a_d) \subset \mathcal{S} \cap [0, N]$, to $d \leq 7 \log \log N$ dla dostatecznie dużych N . Niewiele jednak wiadomo, o tym jak duże może być d . Podczas wykładu, pokażemy, że w zbiór kwadratów zawiera nieskończenie wiele zredukowanych sześciątów Hilberta wymiaru 3. Zastosowana metoda umożliwia pokazania, że liczba względnie pierwszych liczb całkowitych $a_0, a_1, a_2, a_3 \in [0, N]$ taka, że $H(a_0; a_1, a_2, a_3) \subset \mathcal{S}$ jest $\gg N^{1/8}$. Ponadto udowodnimy, że dla każdego $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}, i < j$, zbiór

$$\left\{ \frac{a_i}{a_j} : H(a_0; a_1, a_2, a_3) \subset \mathcal{S} \right\}$$

jest gęsty w zbiorze dodatnich liczb rzeczywistych (w topologii euklidesowej).